UNIVERSIDAD NACIONAL

DE LOMAS DE ZAMORA

FACULTAD DE CIENCIAS AGRARIAS

Introducción a la Matemática

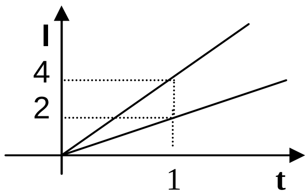
2014

Algunas funciones elementales
Aplicaciones

1 Función Lineal – La recta

Una de las funciones más sencillas está dada por la expresión ***f*(*x*) = *a x***. En el plano cartesiano esta función se representa por una línea **recta** que pasa por el origen del sistema de coordenadas.

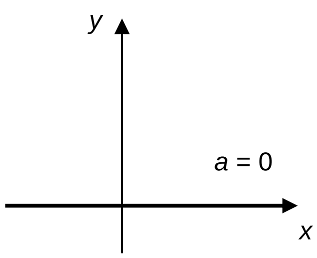
✷ *Ejemplo 1*: Si la variable independiente **t** es el tiempo en meses y la variable dependiente **I** es el interés en pesos, la función **I(t) = a t** representada en un sistema cartesiano permite visualizar la evolución de los intereses simples ganados. La constante **a** está determinada por el capital y la tasa de interés. Por ejemplo:
si C = 100 y R = 2% mensual, resulta **a** = 2; si C = 100 y R = 4% mensual, entonces **a** = 4



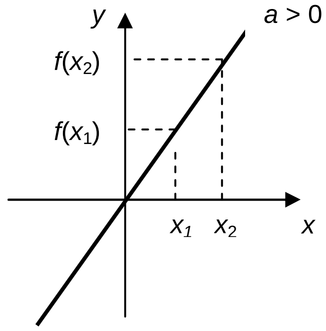
Observamos que cuando la tasa de interés se duplica el interés también se duplica; las semirrectas representadas corresponden a I(t) = 2t y a I(t) = 4t

En general:

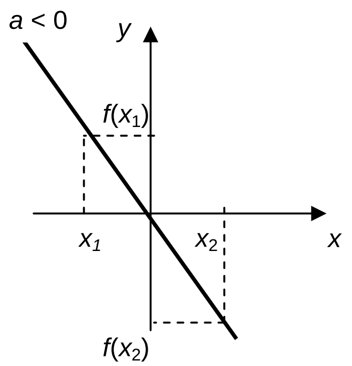
Toda función de la forma ***f*(*x*) = *a x***, donde ***a*** es un número real, se denomina **función de proporcionalidad directa**.
El dominio de la función de proporcionalidad directa está formado por todos los números reales: **D *f* = *R***.
La gráfica de la función de proporcionalidad directa es una **recta** que pasa por el origen de coordenadas.
En el plano cartesiano, la constante ***a*** se llama **pendiente**.



Si ***a* = 0** la recta coincide con el eje *x*. Todos los puntos de la recta tienen la misma ordenada: *y* = 0.
Una función es **constante** si y sólo si todos los puntos de su gráfica tienen la misma ordenada.



Si **a > 0** la recta asciende de izquierda a derecha.
Una función $f(x)$ con dominio real es **creciente** en R si y sólo si para todo x_1 y x_2 perteneciente a R, con $x_1 < x_2$ se verifica que $f(x_1) < f(x_2)$.



Si **a < 0** la recta desciende de izquierda a derecha.
Una función $f(x)$ con dominio real es **decreciente** en R si y sólo si para todo x_1 y x_2 perteneciente a R, con $x_1 < x_2$ se verifica que $f(x_1) > f(x_2)$.

Otros ejemplos de proporcionalidad directa son:

- El alargamiento de un resorte y el peso que colguemos de él.
- El peso de una cantidad de aceite y el volumen que ocupa.
- La distancia recorrida por un móvil que se mueve rectilíneamente con velocidad constante y el tiempo empleado en recorrerla.

Hay muchos fenómenos que se pueden estudiar aproximadamente mediante un modelo de proporcionalidad directa.

En todos los casos interesa conocer el dominio en el cual la relación de proporcionalidad entre las variables se verifica. En el ejemplo del resorte, la proporcionalidad se pierde si el peso es muy grande y el mismo se deforma.

Ejercicio 1: En un bovino, se puede calcular el peso aproximado de la res mediante la siguiente ecuación:

Pr = 0,57.Pv, siendo Pr el peso de la res y Pv el peso vivo.

a) Si mandamos a faena 30 novillos de 400kg de Pv, ¿cuántos kg de carne se obtendrán?
b) Si una media res pesa 100kg, ¿cuál fue el Pv del animal?

c) Si la res contiene 60% de carne y 23% de grasa, ¿qué porcentaje de hueso corresponde y cuál es en kg la composición de la res (carne, grasa y hueso)?

Ejercicio 2: Dibujar las siguientes funciones, indicar su dominio y clasificarlas en constante, creciente o decreciente.

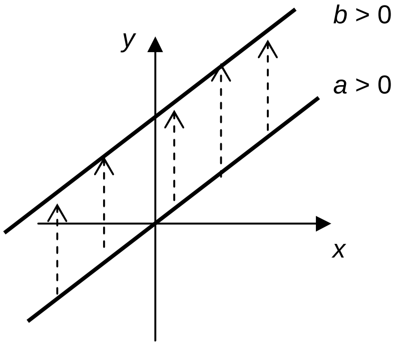
a) $y = 5\,x$ b) $y = 0{,}5\,x$ c) $y = -2$ d) $y = -0{,}2\,x$

Rectas que no pasan por (0;0)

Consideremos la expresión **$f(x) = a\,x + b$**, formada por dos términos:

la parte lineal **$a\,x$** y
la constante no nula **b**

La gráfica de la función **$f(x) = a\,x + b$** se puede obtener a partir de la recta **$y = a\,x$**, que pasa por el origen, sumándole la constante **b** (positiva o negativa) a cada ordenada. Este procedimiento nos da una recta paralela a la anterior. Por ser la gráfica una línea recta, se la denomina **función lineal**.



El punto de intersección con el eje *y* es (0; *b*). A ***b*** se lo llama punto de corte con *y* u **ordenada en el origen**.

La constante ***b*** no influye sobre la pendiente de la recta. Las dos rectas representadas en la figura tienen pendiente ***a***. Son rectas paralelas.

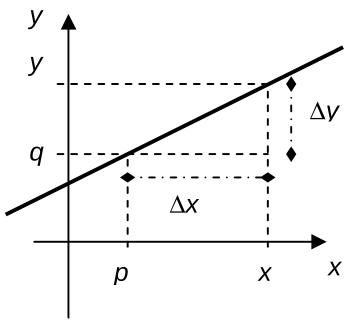
Ejercicio 3: Escribir la ecuación de la recta paralela a $y = -2\,x$, que:

a) pasa por (0; 3).
b) pasa por (-1; 0)

Graficar las tres rectas en un mismo diagrama cartesiano.

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos. Incrementos.

Dado $(p; q)$ un punto fijo de una recta y sea $(x; y)$ un punto variable de la misma recta, las diferencias $\Delta x = x - p$ y $\Delta y = y - q$ se llaman **incrementos de *x* e *y***, respectivamente.



Δ es la letra griega delta mayúscula.

Δx no es el producto de dos números, indica una diferencia o variación en el eje x.

Si $\Delta x \neq 0$, la pendiente a de la recta es: $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (no importa que Δx sea grande o pequeño). A este cociente de incrementos se lo llama **cociente incremental**.

Si conocemos la pendiente de la recta y un punto de su gráfica, podemos hallar la expresión de la función lineal que la determina.

Ejemplo 2: Queremos hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (1; 2) y (2; 5).

Razonamos así:

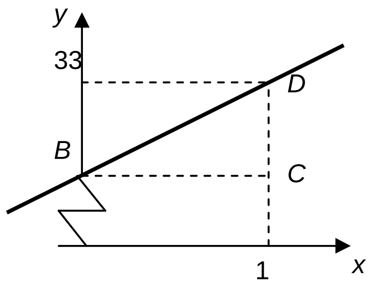
- La ecuación buscada tiene la forma $y = a\,x + b$, entonces debemos determinar los valores de a y de b.
- $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{5-2}{2-1} = 3.$
- Hasta ahora sabemos que: $y = 3\,x + b$.
- Falta hallar b. Como (1; 2) es un punto de la recta, cuando x es 1, y vale 2. En símbolos: $2 = 3.1 + b$ Despejando resulta $b = -1$.
- La ecuación buscada es $y = 3x - 1$.

Verificar que los dos puntos satisfacen la ecuación obtenida y representar la recta. ■

Siempre que las unidades sobre los ejes coordenados sean iguales, el ángulo de inclinación queda determinado por $\tan \alpha = a$. Si las escalas son distintas en x y en y, la pendiente a no se relaciona con el ángulo de inclinación α.

Ejemplo 3: Dibujar la gráfica de la función $y = 3\,x + 30$.

Sabemos que la gráfica es una recta de pendiente $a = 3$ y el punto de corte con el eje y es $b = 30$; se presenta una dificultad, pues b es un número grande comparado con a y el gráfico puede quedar fuera de la hoja o de la pantalla de una calculadora graficadora o de una computadora. Para verlo, ya sea graficando a mano o empleando algún recurso informático, debemos elegir escalas diferentes sobre los dos ejes, por ejemplo la unidad sobre *x* cinco veces mayor que la unidad sobre *y*. En la hoja además, podemos cortar al eje *y* (como en la figura) para bajar a la recta y ahorrar espacio.



Marcamos el punto de corte con el eje *y* que llamamos *B* y desde *B* trazamos un segmento de longitud 1 (en las unidades de *x*) hacia la derecha, obteniendo el punto *C*.
Desde *C* subimos tres unidades (en las unidades de *y*) hasta *D.*
La recta que pasa por los puntos *B* y *D* tiene pendiente $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{1} = 3$ y corta al eje de ordenadas en $b = 30$. ■

⊗ Precaución. Un dibujo puede orientar o ayudar a resolver un problema, pero sólo un desarrollo algebraico o analítico dará seguridad de la solución.

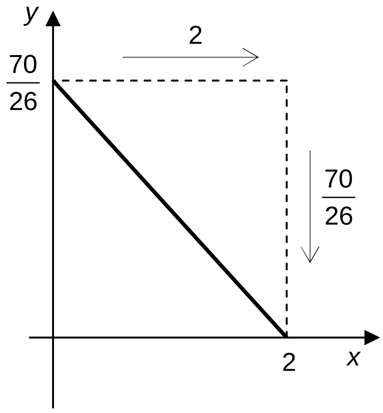
Ecuación de la recta: forma implícita y forma explícita

A veces la relación entre las variables no está dada en la forma **explícita** $y = a\,x + b$, pero es fácil obtenerla. Veamos el siguiente ejemplo.

✸ *Ejemplo 4*: Sabemos que 100 g de granos secos de soja contienen 35 g de proteínas y que 100 g de lentejas secas tienen 26 g de proteínas. Supongamos que un hombre necesita 70 g de proteínas en su alimentación diaria y que los quiere conseguir comiendo soja y/o lentejas.
Sea *x* la cantidad de soja e *y* la de lentejas diarias (*x* e *y* medidas en cantidades de 100 g). ¿Cuál es la relación entre *x* e *y para obtener 70 g de proteínas*?
La proteína ingerida por día al comer soja es $35\,x$ y la proteína ingerida por día al comer lentejas es $26\,y$.
La cantidad diaria total de proteínas es 70 g, por lo tanto la ecuación que vincula x e y es:

$$35\,x + 26\,y = 70 \qquad (1)$$

Al expresar *y* como función de *x* obtenemos $y = -\frac{35}{26}x + \frac{70}{26}$. (2)



Al representar, vemos que cualquier punto del segmento satisface las condiciones de la dieta.

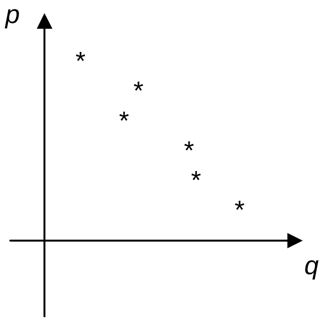
Cuando *x* aumenta dos unidades, *y* disminuye $\frac{70}{26}$; la pendiente es negativa $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{70}{26} : 2 = -\frac{35}{26}$.

Teniendo en cuenta la expresión (2), si consume 100 g de soja ¿cuántos gramos de lenteja deberá consumir para satisfacer el requerimiento diario de proteínas?
Al resolver este interrogante encontramos una de las infinitas posibilidades para satisfacer los requerimientos de proteínas.■
Una ecuación como la (1) se llama **implícita** y una ecuación como la (2) se llama **explícita**. En la ecuación implícita las variables (*x* e *y*) están en el mismo miembro de la igualdad.
Para representar funciones generalmente usamos la forma explícita $y = f(x)$, con ella construimos una tabla de valores, asignándole a *x* valores del domino de *f* y calculando las correspondientes imágenes.
Es fácil representar funciones lineales dadas en forma implícita, ya que podemos obtener de manera inmediata las intersecciones con los ejes coordenados, asignándole cero a la **x**, y a la **y** respectivamente.

Algunas aplicaciones económicas

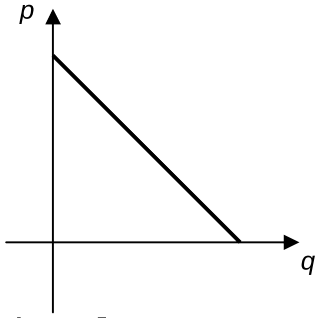
En Economía se estudia la evolución de los precios de bienes y servicios. Esta evolución depende de varias variables: demanda, salarios, oferta, etc.

A los efectos de simplificar el estudio nos limitaremos, por ahora, a considerar el **precio (p)** en función de la **demanda (q)**.



Para iniciar una investigación debemos comenzar por obtener una estadística que nos permita disponer de una gráfica de puntos aislados. Luego tenemos que averiguar si existe alguna ley o ecuación que sea verificada (aunque sea de manera aproximada) por los valores hallados empíricamente.

El caso más sencillo se presenta si los puntos de la gráfica están aproximadamente alineados.
Para determinar la función lineal que mejor se aproxima a un conjunto de puntos aislados, debemos emplear algunos conceptos matemáticos que analizaremos más adelante.
En general:



La pendiente de la **función lineal de demanda** es negativa, pues, como es lógico, si el precio por unidad disminuye (el artículo se abarata), la demanda aumenta (hay más consumidores en condiciones de comprar).

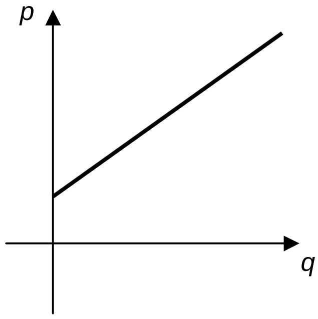
✸ *Ejemplo 5*: Un comerciante puede vender 20 esquiladoras por día al precio de $ 25 cada una, pero puede vender 30 si le fija un precio de $ 20 a cada una. Determinar la ecuación de la demanda suponiendo que es lineal.

La ecuación de demanda es de la forma:
$p = a\,q + b$ siendo a la pendiente y b la ordenada en el origen.
Teniendo en cuenta los incrementos en el precio y en la cantidad, el cociente incremental es: $a = \dfrac{\Delta p}{\Delta q} = -\dfrac{5}{10} = -0.5$.
Por lo tanto: $p = -0.5\,q + b$
Como el punto (20; 25) debe pertenecer a la recta: $25 = -0{,}5.20 + b$
despejando obtenemos la ordenada en el origen, $b = 35$.

La ecuación buscada es: $p = -0.5\,q + 35$.■

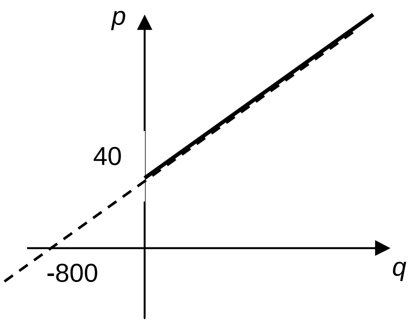
El precio también está relacionado con la **oferta**.

En general:



La gráfica de una **función lineal de oferta** tiene pendiente positiva, pues los proveedores enviarán muchos artículos al mercado si pueden ponerle un precio alto y una cantidad más pequeña de artículos si el precio es más bajo (prefieren esperar que el precio suba para ofrecerlos).

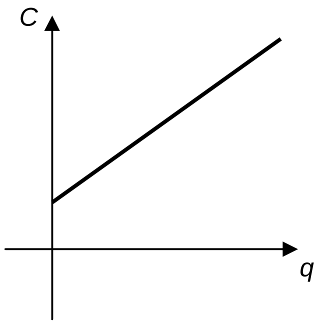
Ejercicio 4: La siguiente gráfica representa la curva de oferta mensual de un determinado producto.



a) Determinar la ecuación de oferta.

a) ¿Cuál será el precio cuando los productores ofrezcan 2.000 unidades mensualmente?

La función de **costo** tiene como variable independiente el número de unidades producidas.
Los **costos totales** son la suma de los costos **fijos** y los costos **variables**.
Los costos **fijos** como alquileres, seguros, etc., no dependen del nivel de producción. Estos deben pagarse independientemente de que se produzca o no.
Los costos **variables** dependen de la producción, por ejemplo: materia prima, mano de obra, etc.
En general:

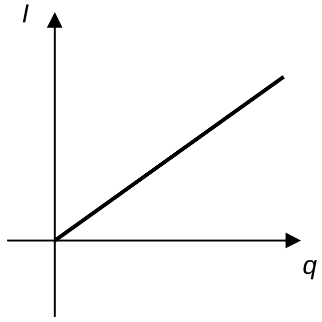


La gráfica de una función de costo lineal es una semirrecta de pendiente positiva.

Ejercicio 5: Hallar la función de costo lineal que satisfaga las siguientes condiciones: el costo es de $ 525 cuando se producen 150 unidades y de $ 700 para producir 400 unidades. ¿Cuál es el costo fijo? ¿Cuál es el costo de producir 200 unidades?

El **ingreso total** es el dinero que el productor recibe por la venta de sus productos. **I = p.q** ; p es el precio por unidad y q es el número de unidades vendidas.

En general:



La función de ingreso lineal es una semirrecta de pendiente positiva.

Ejercicio 6: Un productor vende cada artículo a $ 5. ¿Cuál es la función de ingreso total?

Ejercicio 7: Si la demanda es una función constante, ¿por qué la función de ingreso total es una función de proporcionalidad directa?

Otras aplicaciones

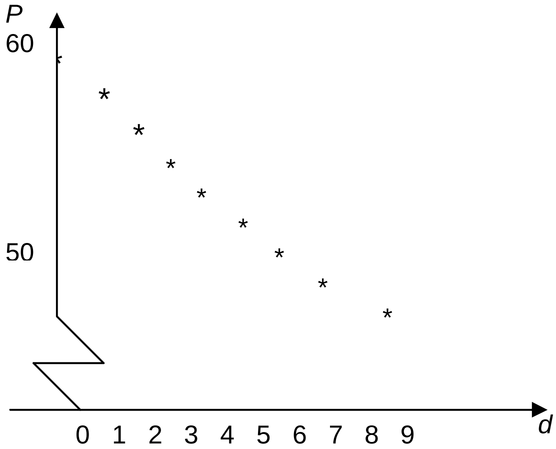
No sólo en Economía se estudia la evolución de las variables que intervienen en un fenómeno. En otras ciencias, como Biología, Física y Química, también es posible vincular linealmente algunas variables. Consideremos otro ejemplo.

✸ *Ejemplo 6*: En un laboratorio se experimentó una dieta para observar la disminución de peso de un ratón. Diariamente se controló el peso (en gramos) y se registraron los siguientes datos:

Día	0	1	2	3	4	5	6	7	9
peso	60,0	58,5	57,0	55,2	54,0	52,1	50,7	49,5	46,5

Pasada esta fase del experimento, que es la recolección de datos, al investigador de la dieta le surgieron algunos interrogantes: ¿cuánto disminuye el peso diariamente?, ¿fue constante la disminución?, ¿cómo estimar el peso a los ocho días del comienzo de la dieta?

El investigador está necesitando encontrar la función que vincula el peso con la cantidad de días de aplicación de la dieta: $P = f(d)$.
Si representamos en un sistema de ejes cartesianos los puntos de la tabla anterior obtenemos:



Como vemos, se puede trazar, una recta que si bien no pasa por todos los puntos, puede representar aproximadamente el experimento.

Para obtener la ecuación de la recta que mejor se aproxima a todos los puntos de la tabla se pueden emplear diferentes métodos, pero ahora la encontramos de la siguiente manera:
Su ecuación tiene la forma $p = a\ d + b$, como al inicio del experimento el peso era de 60 g, $b = 60$ (corte con el eje vertical). Falta hallar a, para lo cual elegimos otro punto de la recta, por ejemplo (4; 54), al reemplazar resulta:

$$54 = a\ 4 + 60$$

Despejando resulta: $a = -1{,}5$
La recta de ecuación $p = -1{,}5\ d + 60$ describe aproximadamente el peso del ratón durante los nueve días que duró la experiencia.

Ahora, podemos responder a los interrogantes del investigador.
La disminución del peso diario es, aproximadamente constante: 1,5 g/d.
El peso correspondiente a los ocho días, lo calculamos así:

$$p = -1{,}5 \,.\, 8 + 60 = 48.$$

A los ocho días el peso fue, aproximadamente de 48 g.

¿Tiene sentido calcular, mediante $p = -1{,}5\ d + 60$, el peso correspondiente a los cien días? ¿Por qué?

Interpolación lineal

Para estimar un valor entre dos datos conocidos, sabiendo que la relación entre las variables es lineal, no es necesario encontrar la ecuación de la recta que determinan los puntos fijos.
Teniendo en cuenta la relación lineal, podemos interpolar, es decir, poner entre polos o extremos.

Ejemplo 7: Continuemos con el ejemplo 5. Otra forma de calcular el peso promedio correspondiente al octavo día, sin emplear la ecuación de la recta es razonar así:

a los 4 días $\rightarrow$ el peso es 54
a los 8 días $\rightarrow$ el peso es 54 + x
a los 9 días $\rightarrow$ el peso es 46.5

Vemos que, a un incremento de días le corresponde un incremento en el peso:

a $\Delta d = 5$ le corresponde $\Delta p = -7{,}5$
a $\Delta d = 4$ le corresponde $\Delta p = x$

Por considerar los incrementos directamente proporcionales, resulta:

$$\frac{5}{-7{,}5} = \frac{4}{x}$$

de donde $x = -6$.
Por lo tanto, el peso a los ocho días es 48 g.
Si tomamos como referencia, por ejemplo, el día cinco encontraríamos un peso distinto de 48 g., pero muy próximo. ¿Cuál es?■

En el ejemplo anterior hemos estimado el incremento del peso promedio a los ocho días interpolando y considerando como extremos o polos a 4 y 9.
Razonando en forma similar se puede extrapolar y calcular, por ejemplo, el peso a los doce días. ¿Cuál es?

Ejercicio 8: La concentración de dióxido de carbono CO_2 entre los 9 km y 12 km de altura fue de 313 partes por millón en 1990 y de 321 partes por millón en 2000. Suponiendo un crecimiento constante y utilizando la extrapolación lineal, estimar la concentración de dióxido de carbono para el año 2020.

Ejercicio 9: En algunos países, por ejemplo Estados Unidos, se utiliza otro sistema de medición de la temperatura, los grados Fahrenheit. Sabiendo que 10ºC = 50ºF y que 60ºC = 140ºF, obtener la ecuación que permite traducir temperaturas de ºC a ºF. ¿Cuántos °F corresponden a 0ºC? ¿y a 100ºC?

Ejercicio 10: Para el ganado ovino que se mantiene en temperaturas elevadas, la tasa respiratoria *r* (por minuto) aumenta al reducirse la longitud de la lana *l* (en centímetros). Supóngase que el ganado que tiene lana de 2 cm de largo tiene también una tasa respiratoria promedio de 160 y que en el que tiene lana de 4 cm se tiene una tasa respiratoria de 125. Si *r* y *l* tienen una relación lineal, se pide:

a) Obtener una ecuación que dé como resultado *r* en términos de *l*.

b) Hallar la tasa respiratoria de ovejas cuya lana tiene una longitud de 1 cm.

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

La interpretación y resolución de ciertos problemas implica la necesidad de plantear más de una ecuación.

✷ *Ejemplo 8*: Un pez de la especie A consume por día 10 g de comida tipo1 y 5 g de comida tipo 2; mientras que un pez de la especie B consume por día 6 g de comida tipo 1 y 4 g de comida tipo 2.
Si un medio ambiente dado tiene disponible diariamente 2,2 kg de comida tipo 1 y 1,3 kg. de comida tipo 2, ¿qué tamaños de población de las dos especies consumirá toda la comida existente?
Sean: x el número de peces de la especie A e y el número de peces de la especie B. El consumo de toda la comida tipo 1 está dado por:
$10\,x + 6\,y = 2.200$, mientras que el consumo de toda la comida tipo 2 está dado por: $5\,x + 4\,y = 1.300$.
Como la población consumirá ambos tipos de comida simultáneamente, podemos formar un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 10\,x + 6\,y = 2.200 \\ 5\,x + 4\,y = 1.300 \end{cases}$$

Cada ecuación tiene infinitas soluciones, pero resolver el sistema significa encontrar los valores de x e y que satisfacen a las dos ecuaciones.

Existen diferentes procedimientos para determinar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales.

En este caso, despejamos x de la primera ecuación y reemplazamos lo obtenido en la segunda ecuación:

$$\begin{cases} 10\,x + 6\,y = 2.200 \\ 5\,x + 4\,y = 1.300 \end{cases} \qquad x = \frac{2.200 - 6y}{10} \quad (1)$$

$$5\ \frac{2.200 - 6y}{10} + 4\,y = 1.300$$

Resolviendo esta ecuación con una incógnita obtenemos: $y = 200$
Reemplazando en (1), resulta: $x = 100$.

Verifiquemos que: $x = 100$ e $y = 200$ es solución del sistema:

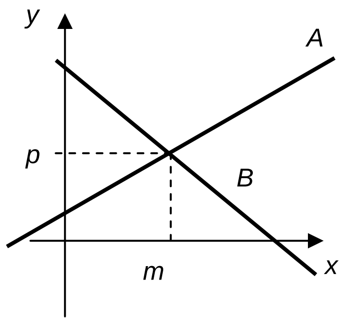
$$10 \,.\, 100 + 6 \,.\, 200 = 2.200$$
$$5 \,.\, 100 + 4 \,.\, 200 = 1.300$$

Este sistema tiene una única solución (100; 200).
Toda la comida disponible será consumida por 100 peces de la especie A y 200 de la especie B. ■

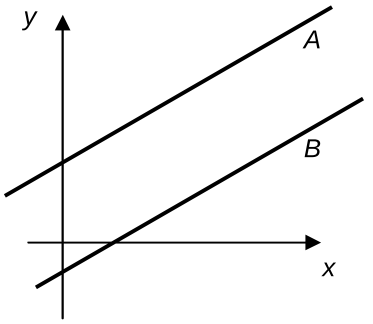
Los sistemas formados por dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se pueden resolver gráficamente en el plano cartesiano, ya que cada ecuación es la de una recta del plano. Las coordenadas del punto de intersección, si existe, determinan la solución del sistema.

En general:

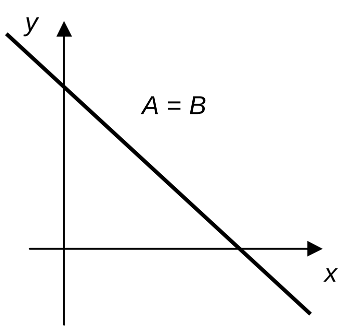
Dadas dos rectas *A* y *B* del plano, si las representamos en un mismo sistema cartesiano, se puede presentar alguna de estas situaciones.



A y *B* se cortan en el punto (*m*; *p*).
Este sistema tiene **solución única,** es: $x = m$ e $y = p$.



A y *B* son paralelas (ambas rectas poseen la misma pendiente), no tienen ningún punto en común.
Este sistema **no tiene solución**.



A y *B* están superpuestas, tienen todos los puntos en común.
Este sistema **tiene infinitas soluciones**.

Ejercicio 11: Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones gráfica y analíticamente:

a) $\begin{cases} 3x - 4y = 13 \\ 3y + 2x = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y - 8 = 0 \\ 2x + 4y + 4 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 5y = 2 \\ 2x + 10y = 4 \end{cases}$

Punto de equilibrio del mercado

Si el precio de cierto artículo es demasiado alto, los consumidores no lo adquieren, mientras que si es demasiado bajo los proveedores no lo venden. Si existe un **precio** para el cual la **cantidad demandada** por los consumidores **es igual** a la **cantidad ofrecida** por los productores, a ese precio se lo llama de **equilibrio del mercado**.

El punto de **equilibrio del mercado** tiene dos componentes: el **precio** de equilibrio y la **cantidad** de equilibrio.

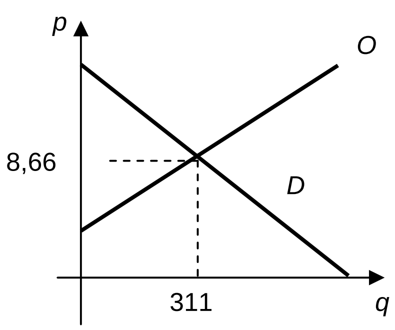
✸ *Ejemplo 9*: Las ecuaciones de oferta y demanda de un determinado bien son:

$$\text{O: } 3q - 200p + 800 = 0$$
$$\text{D: } 3q + 100p - 1800 = 0$$

donde p es el precio por unidad y q el número de unidades por intervalo de tiempo.
Como la cantidad de equilibrio es la cantidad para la cual el precio de la demanda es igual al precio de la oferta:

$$\begin{array}{ccc} \text{Demanda} & & \text{Oferta} \\ -\dfrac{3}{100}q + 18 & = & \dfrac{3}{200}q + 4 \end{array}$$

Al resolver la ecuación obtenemos $q = 311$ (cantidad de equilibrio) y el precio es $p = 8{,}66$ (precio de equilibrio).



Para un precio $p = 8{,}66$, la cantidad ofrecida y la cantidad vendida coinciden ($q = 311$).
A un precio menor, ¿cómo es la demanda con respecto a la oferta? ■

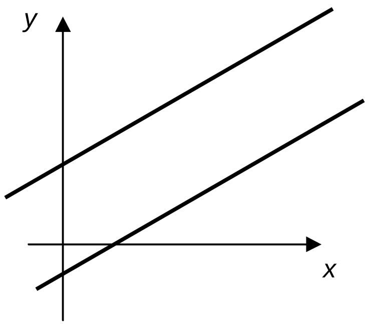
Ejercicio 12. Un comerciante puede vender 200 unidades de cierto artículo al día a \$30 por unidad o 250 unidades a \$27 por unidad. La ecuación de la oferta para este artículo es $6\,p = q + 48$.

a) Determinar la ecuación de la demanda para el artículo, suponiendo que es lineal.
b) Calcular el precio y la cantidad de equilibrio.

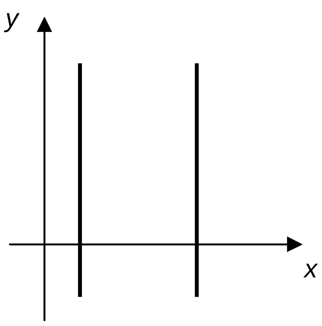
Rectas y pendientes

Se puede probar que:

Dos rectas no verticales, son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

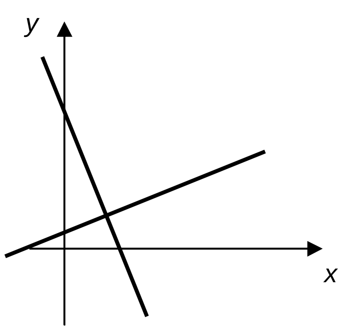


Las rectas verticales son paralelas.

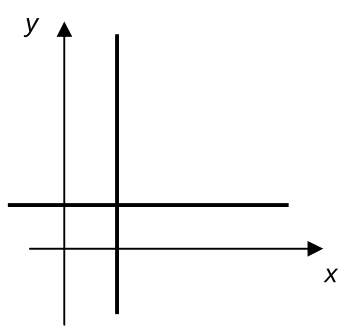


Se puede probar que:

Dos rectas con pendientes definidas son perpendiculares si y sólo si el producto de las mismas es igual a -1.



La recta perpendicular a una recta horizontal es vertical, y recíprocamente.

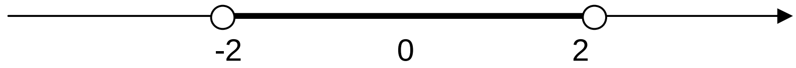


Rectas . . . pero no funciones

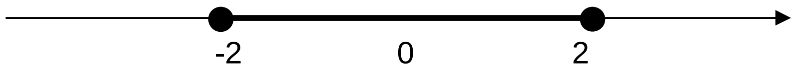
La ecuación de una recta vertical es $x = k$ (donde k es un número), pero no es una función. ¿Por qué?

Intervalos

Si $|x| < 2$, hay muchos valores de x que satisfacen la desigualdad, los podemos indicar así: $-2 < x < 2$



Si $|x| \leq 2$, al segmento anterior le agregamos los extremos -2 y 2.

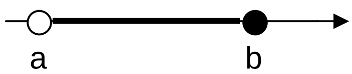


El primer conjunto es un ejemplo de intervalo abierto, lo indicamos así: (-2; 2); el segundo es un ejemplo de intervalo cerrado lo indicamos así: [-2; 2].

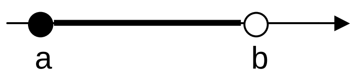
En general, dados dos números a y b siendo a < b, se llama intervalo abierto al conjunto de puntos {x / a < x < b}, lo indicamos: (a; b).

Si los puntos extremos a y b pertenecen al conjunto, decimos que el intervalo es cerrado y lo indicamos: [a; b].

A veces se trabaja con intervalos semiabiertos o semicerrados.



(a; b]



[a; b)

Por último, a veces se trabaja con intervalos infinitos, por ejemplo todos los números tales que x > a, los representamos así:

(a; ∞)

Ejercicio 13. Un resorte mide 7 cm. cuando colgamos de él 10 g. y mide 13 cm. cuando colgamos 80 g.

a) Escribir la ecuación que vincula la longitud *l* con el peso *p.*
b) ¿Cuál es la longitud del resorte cuando no colgamos ningún peso?
c) ¿Cuál es la variación de longitud por cada 10 g?
d) Considerando que el resorte empieza a deformarse y perder elasticidad cuando se alarga 5 veces su longitud inicial, ¿cuál es el dominio de definición de la función $l(p)$?

Ejercicio 14. Dibujar la función $y = 9x - 20$ utilizando una unidad sobre el eje *y* que sea la décima parte de la unidad sobre el eje *x*.

Ejercicio 15. Representar gráficamente:

$$y = \begin{cases} 3x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ -2 & \text{si} \quad x \notin (0,1) \end{cases}$$

Ejercicio 16. Una varilla de cobre que forma parte de un instrumento está expuesta a diferentes temperaturas. Su longitud *l* es casi una función lineal de la temperatura siempre que $t < 150$ºC. Encontrar la fórmula de $l(t)$ sabiendo que si $t = 15$ºC, $l = 76.45$ cm. Y que si $t = 100$ºC, $l = 76.56$ cm.

Ejercicio 17. Una empresa de productos químicos desea satisfacer un pedido de 500 litros de una solución de ácido nítrico al 25 % (esto significa que el 25 % del volumen es ácido nítrico). Si se encuentran en depósito disponibles soluciones al 30 % y al 18 % ¿cuántos litros de cada una de ellas se deben mezclar para cumplir con lo requerido en el pedido?

Ejercicio 18. En pruebas de dietas experimentales para cerdos, se determinó que el peso promedio, *W* (en kilogramos) de un cerdo era, estadísticamente, función lineal del aumento de días *d* posteriores al inicio de la dieta en donde $0 < d < 100$. Si el peso de un cerdo fue de 20 kg. al comienzo de la dieta y después subió 6,6 kg. cada diez días; determinar *W* como función de *d* y evaluar el peso de un cerdo 50 días después de haber comenzado la dieta.

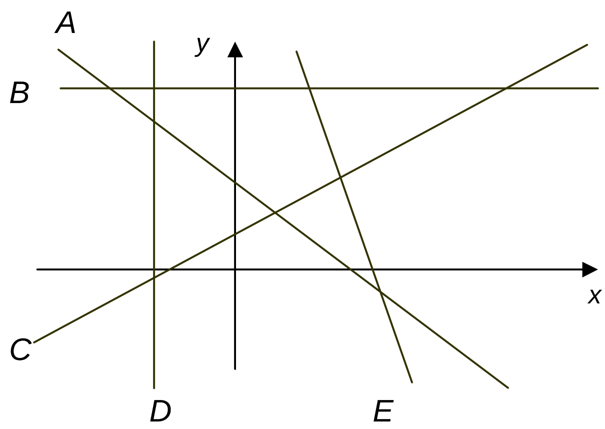
Ejercicio 19. Encontrar la ecuación de la recta que satisface las condiciones:

a) Que pasa por (2; -5) y (-4; -1).
b) Que pasa por (3; 0) y es paralela al eje *y*.
c) Que pasa por (0; 3) y es paralela al eje *x*.
d) Que pasa por (-1; -2) y la pendiente es $\frac{5}{3}$.

e) Que tiene por gráfica al eje x.
f) Que tiene por gráfica al eje y.
g) Pasa por (2; 1) y es perpendicular a la recta $x + y = 0$.
h) Pasa por (3; 4) y es perpendicular a la recta $x = 2$.
i) Pasa por (0; -1) y es paralela a la recta determinada por (2; 2) y (3; 1).

Graficar las rectas encontradas.

Ejercicio 20. A partir de las gráficas que siguen, determinar si la pendiente de cada una de las rectas es positiva, negativa, nula o no está definida.



Ejercicio 21. Determinar las intersecciones con los ejes coordenados de la gráfica de la función $f(x) = -0,5\,x + 3$.

Ejercicio 22. Considerar que se requieren \$40 de costos para fabricar 10 artículos y que el costo de fabricar 20 artículos es de \$70. Si el costo *C* está relacionado en forma lineal con la producción *q*, determinar la ecuación que relaciona *C* y *q*. Calcular el costo de fabricar 35 unidades.

Ejercicio 23. Una empresa cobra una comisión del 6% en las compras de lana en cantidades cuyo valor esté comprendido entre \$50 y \$300. Para cantidades que sobrepasen los \$300, la firma cobra el 2% de la cantidad comprada más \$12. Sea $f(x)$ la comisión cobrada y x la cantidad de lana comprada (en pesos).

a) Escribir $f(x)$. b) Calcular $f(100)$ y $f(500)$.

Ejercicio 24. El contenido de N (nitrógeno) de un determinado alimento es de 30g/kg de MS (materia seca). Si podemos determinar el contenido de proteína bruta (PB) según la función PB = 6,25.N, encontrar el % de proteína bruta del alimento.

Ejercicio 25. Si un alimento está formado por los siguientes ingredientes: Silo de maíz 40% (PB: 7%), Maíz en grano 45% (PB: 9%) y Pellet de girasol 15% (PB 34%)

¿Qué porcentaje de PB tendrá el alimento?

Ejercicio 26. Una vaca lechera de 500 kg necesita por día 18 Mcal EM (energía metabolizable) para mantenerse y además 1Mcal EM / litro de leche producida. ¿Cuántas Mcal EM necesitará consumir para producir 40 litros de leche por día?
(una megacaloría es equivalente a mil kilocalorías)

Ejercicio 27. Colocamos 500 g de MV (materia verde) en una estufa y obtenemos 120g de MS. Calcular el porcentaje de MS del forraje.

Ejercicio 28. La producción de MV de un campo es de 40000 kg por hectárea por año. Calcular la cantidad de materia seca por hectárea sabiendo que el 80% de la MV es agua.

Ejercicio 29. Fueron servidas 200 vacas y quedaron preñadas 150. El índice de preñez es el porcentaje de animales que quedaron preñadas respecto del total. Calcular el índice de preñez.

Ejercicio 30: Dados $A = (2; 1{,}5)$, $B = (6; 4{,}5)$ y $C = (9; w)$ hallar w tal que A, B y C estén alineados. ✍

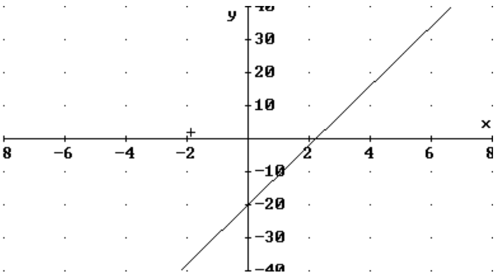
Respuestas:

1.a) 6840 kg. b) aprox. 350 kg. c) 17%, 180 kg., 69 kg., 51 kg.

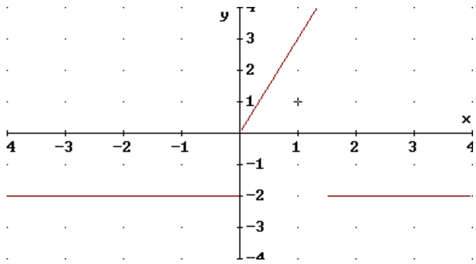
2. a y b, crecientes; c constante; d decreciente 3. y = -2x+3; y = -2x-2
4. p= (1/20)q+40; 140; 5. C(q) = 7/10 q + 420; 420; 560 6. 5q
8. 329 p.p.m 9. F = 9/5 c + 32; 32ºF; 212ºF

10. r(l) = -35/2 l + 195; 355/2 11. (3; -1); no tiene solución; infinitas soluciones 12. (150; 33) 13. l(p) = 3/35 p+43/7; l(0) = 43/7; 6/7; 0 < p < 286.6

14.



15.



16. l(t) = 0.0013 t + 76.43 17. 208 y 292
18. W(d) = 0.66 d + 20; W(50) = 53 19. y = -2/3 x - 11/3; x = 3;y =3
y = 5/3 x - 1/3; y = 0; x = 0; y = x -1; y = 4; y = -x - 1
20. A negativa, C positiva, B nula, E negativa. D no tiene pendiente definida. 21. (6; 0) y (0; 3) 22. C(q) = 3 q + 10; C(35) = 115
23.

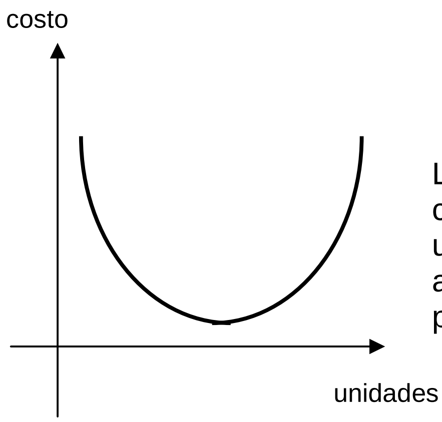
$$f(x) = \begin{cases} 0{,}06x & si\ \ 50 \le x \le 300 \\ 0{,}02x + 12 & si\ > \ 300 \end{cases}$$

f(100) = 6; f(500) = 22
24. 18,75 % 25. 11,95 26. 58 27. 24%
28. 8000 29. 75% 30. w = 6,75

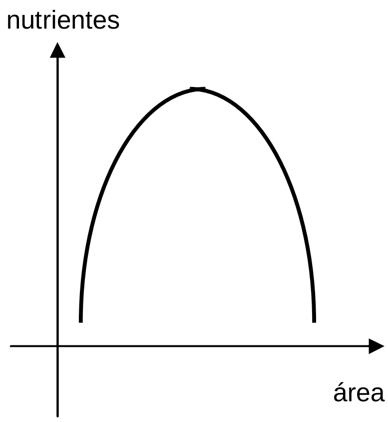
2 *Otras funciones elementales*

Función Cuadrática – La parábola

En distintas actividades profesionales surgen problemas cuyo estudio se realiza con modelos simplificados, de posible resolución matemática. Vimos algunos problemas reales que pudimos resolverlos mediante funciones lineales, los siguientes son ejemplos de problemas que no se pueden estudiar con ese tipo de funciones.



Los economistas utilizan las curvas de costo promedio que relacionan al costo unitario promedio de fabricación de un artículo con el número de unidades a producir.



Los agrónomos usan curvas que relacionan la producción de nutrientes en una planta con el área del follaje.

Cada una de estas curvas puede tener forma cóncava abierta hacia arriba o hacia abajo.

Las funciones más simples cuyas gráficas se parecen a estas curvas son las funciones cuadráticas.

En general:

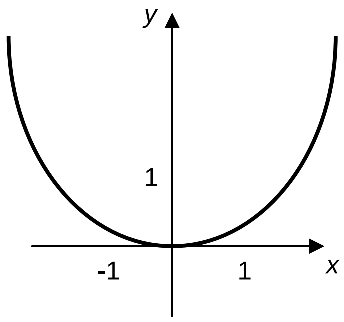
Toda función de la forma ***f*(*x*) = *a x*^{2} + *b x* + *c***, donde ***a*, *b*** y ***c*** son números reales, siendo ***a*** no nulo, se denomina **función cuadrática.**

El dominio de la función cuadrática está formado por todos los números reales: **D *f* = *R***.

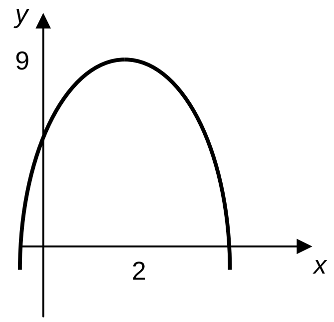
La gráfica de la función cuadrática se llama **parábola.**

✸ *Ejemplo 1*: En las siguientes figuras mostramos algunas parábolas.

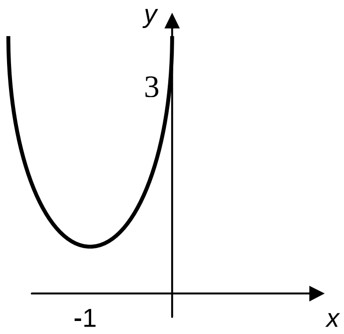
$f(x) = x^2$



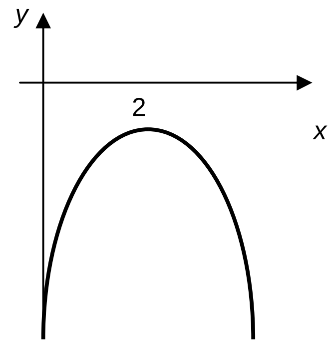
$f(x) = - x^2 + 4x + 5$



$f(x) = x^2 + 2x + 3$



$f(x) = - 2x^2 + 4x – 5$



Ejercicio 1: Teniendo en cuenta las gráficas de las parábolas representadas en el ejemplo 1, determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de cada una de dichas funciones cuadráticas.

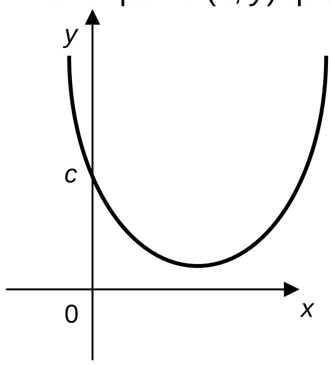
Representación de funciones cuadráticas

Toda parábola tiene un **eje de simetría**, la intersección de la parábola con el eje de simetría se llama **vértice**.

Para representar una función cuadrática es importante determinar:

- intersección con el eje de ordenadas
- coordenadas del vértice
- intersección, si existe, con el eje de abscisas.

Sea $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$.
Buscar la intersección con el eje de ordenadas significa hallar el punto del eje y que pertenece a la gráfica de la parábola, es decir, hay que determinar el punto $(0; y)$ que verifica: $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$.

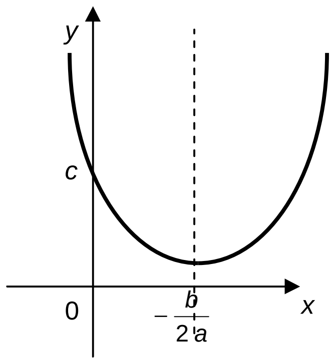


Como $f(0) = c$, el punto $(0; c)$ es la intersección buscada.

Esta representación corresponde a ciertos valores de a, b y c; cuyos signos son: $a > 0$, $b < 0$ y $c > 0$.

Ejercicio 2: En cada una de las parábolas representadas en el ejemplo 1, determinar las coordenadas del punto de intersección de las mismas con el eje de ordenadas.

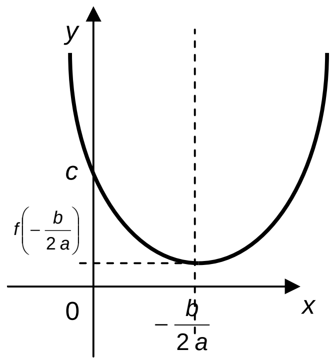
Se puede probar que:



La recta $x = -\dfrac{b}{2\,a}$ es el eje de simetría de la parábola.

Esta representación corresponde a ciertos valores de a, b y c; cuyos signos son: $a > 0$, $b < 0$ y $c > 0$.

Como el vértice de la parábola es la intersección de la gráfica de la función con su eje de simetría, la abscisa del vértice es $x = -\dfrac{b}{2\,a}$.



Como el punto pertenece a la gráfica de la parábola, la ordenada del vértice es $y = f\left(-\dfrac{b}{2\,a}\right)$.

Esta representación corresponde a ciertos valores de a, b y c; cuyos signos son: $a > 0$, $b < 0$ y $c > 0$.

Ejercicio 3: En cada una de las parábolas representadas en el ejemplo 1, determinar las coordenadas del vértice.

Buscar las intersecciones con el eje de abscisas (si existen) significa hallar los puntos del eje *x* que pertenecen a la parábola, es decir, hay que determinar qué puntos $(x; 0)$ verifican

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c.$$

Por lo tanto, debemos resolver la ecuación $a\,x^2 + b\,x + c = 0$.

Se puede probar que, la fórmula que permite calcular los valores buscados es:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

Los dos números x_1 y x_2 se llaman **ceros** de la función $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, o **raíces** de la ecuación $a\,x^2 + b\,x + c = 0$.

El radicando se llama **discriminante** y lo denotamos **$D = b^2 - 4ac$**.

- Si $D > 0$, existen dos soluciones reales distintas x_1 y x_2.
- Si $D = 0$, las dos soluciones reales coinciden.
- Si $D < 0$, las soluciones no son reales pues no se puede calcular en *R* la raíz cuadrada de un número negativo.

Por lo tanto: la condición para que una ecuación cuadrática tenga soluciones reales es $D \geq 0$.

Ejercicio 4: En cada una de las parábolas representadas en el ejemplo 1, determinar los puntos de intersección con el eje de abscisas.

Los ceros de una función cuadrática permiten factorear su expresión. Es fácil verificar que: si x_1 y x_2 son las raíces de $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, entonces: $a\,x^2 + b\,x + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$

Ejemplo 2: Factorear la expresión $2\,x^2 - 10x + 12$.
Primero buscamos las raíces de la ecuación $2\,x^2 - 10x + 12 = 0$ mediante la fórmula resolvente y obtenemos 2 y 3.
Por lo tanto: $2\,x^2 - 10\,x + 12 = 2.(x - 2)(x - 3)$.
Verificar, multiplicando, que la igualdad se cumple.■

Ejercicio 5: Dada la función cuadrática $f(x) = x^2 - 2\,x - 15$, se pide:

a) Calcular los ceros
b) Factorear el polinomio $x^2 - 2\,x - 15$.

Conociendo tres puntos de una parábola, se puede encontrar su expresión analítica.

Ejemplo 3: Hallemos la función cuadrática que pasa por:

(-1; 3), (0; 2) y (1;-1).

El problema es calcular a, b y c para reemplazar en la expresión general de una función cuadrática: $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$.

Si (0; 2) pertenece a la gráfica de la parábola, $f(0) = 2$; es decir, $c = 2$.
Por lo tanto: $f(x) = a\,x^2 + b\,x + 2$.

Como (-1; 3) es un punto de la parábola, $f(-1) = 3$. Reemplazando queda: $3 = a\,(-1)^2 + b\,(-1) + 2$
Como $f(1) = -1$, reemplazando obtenemos otra ecuación con las incógnitas a y b. $-1 = a\,.\,1^2 + b\,.\,1 + 2$
De esta manera encontramos dos condiciones que deben cumplir los valores de a y de b.
La solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 1 = a - b \\ -3 = a + b \end{cases}$$

es, $a = -1$ y $b = -2$.
Entonces, la función cuadrática que pasa por (-1; 3), (0; 2) y (1; -1) es:

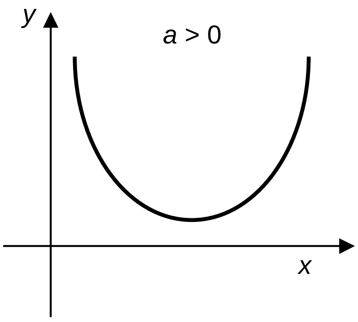
$$f(x) = -1\,x^2 - 2\,x + 2. \ ■$$

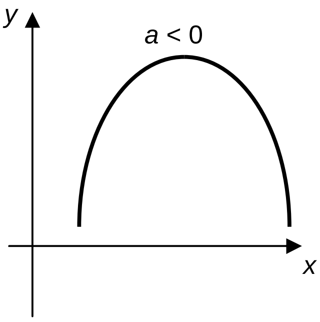
Ejercicio 6: Determinar la fórmula de la función cuadrática tal que:

a) El eje de simetría es $x = -1$ y pasa por (0; -8).
b) El vértice es (1; 0) y pasa por (0; 1)
c) El vértice es $\left(1; -\frac{9}{2}\right)$ y un cero es 4.

Extremos de la función cuadrática

Sea $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$.

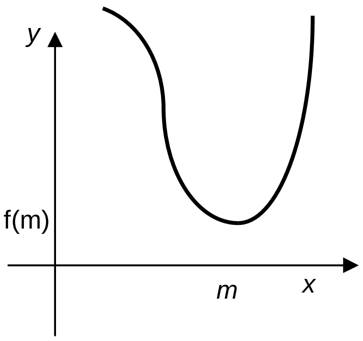




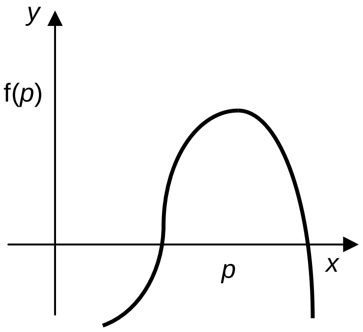
Si $a > 0$, el vértice es el punto "más bajo" de la parábola. Esto significa que y toma su valor mínimo en ese punto.

Si $a < 0$, el vértice es el punto "más alto" de la parábola. Esto significa que y toma su valor máximo en ese punto.

En general:



Una función f(x) tiene un **mínimo relativo** (o local) en $x = m$ si hay un intervalo abierto I que contiene a m, tal que $f(m) < f(x)$ para todo x que pertenece a I.
$f(m)$ es el mínimo relativo.



Una función f(x) tiene un **máximo relativo** (o local) en $x = p$ si hay un intervalo abierto I que contiene a p, tal que $f(p) > f(x)$ para todo x en I.
$f(p)$ es el máximo relativo.

✸ *Ejemplo 4*: La función de demanda para el producto de un fabricante es $p = 1.000 - 2\,q$, donde ***p*** es el precio (en pesos) por unidad cuando existe una cantidad demandada ***q*** por los consumidores.

Calcular el nivel de producción que hace máximo el ingreso total del productor.

Ingreso total = (precio por unidad) x (número de unidades vendidas)

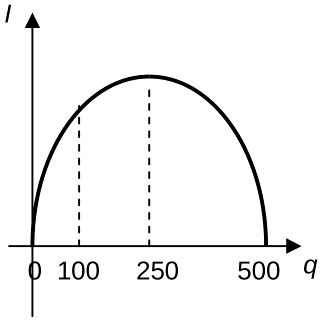
$I = p \cdot q$

$I = (1.000 - 2q) \cdot q$

$I = 1.000\,q - 2\,q^2$

La función de ingreso es cuadrática.

La intersección con el eje de ordenadas es: $I(0) = 0$



Las coordenadas del vértice son:

$$q = -\frac{b}{2a} = 250$$

$I = I(250) = 125.000$

Para determinar la intersección con el eje de abscisas, resolvemos $1.000\,q - 2\,q^2 = 0$, por lo tanto:

$q_1 = 0$ y $q_2 = 500$

Para obtener otros puntos de la gráfica, calculamos además, $I(100) = 80.000$ y por simetría, $I(400) = 80.000$.

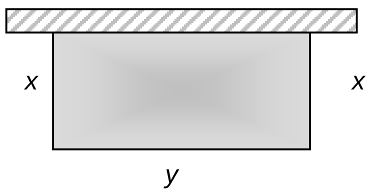
El ingreso máximo es $125.000 que corresponde a un nivel de producción $q = 250$.

Representamos el arco de parábola sólo en el primer cuadrante pues ni los ingresos ni las cantidades producidas pueden ser valores negativos.

■

✸ *Ejemplo 5*: Disponemos de 200 m. de alambre de cerco con el cual queremos armar un corral rectangular. Un lado del mismo está dado por una pared ya existente. ¿Cuál es la superficie máxima que puede cercarse?

Llamando x e y a los lados del corral, la superficie encerrada es: $S = x \cdot y$



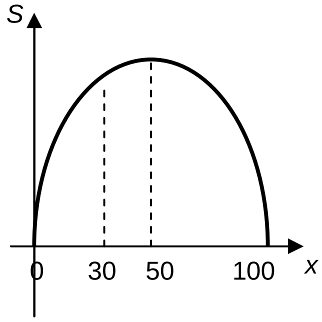
Pero la longitud de cada uno de los lados del rectángulo está condicionada por la cantidad de alambre que tenemos para armar el corral, ya que $y = 200 - 2x$.

Entonces:

$S = x\,(200 - 2x) = 200x - 2x^2$.

Como S es una función cuadrática con $a < 0$, tiene un máximo en el vértice $(50; S(50))$. La superficie máxima es $S(50) = 5.000$.

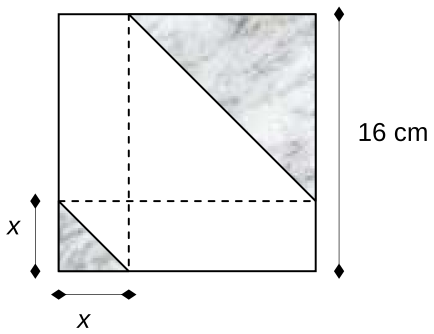
La máxima superficie es 5.000 m^2 que se obtiene cuando $x = 50$ m e $y = 100$ m.



Al representar la función observamos que:

- la mayor superficie es 5.000 m^2, que corresponde a x = 50 m
- si x = 30 m, la superficie encerrada es 4.200 m^2
- para cualquier valor distinto de 50 m, la superficie es menor que 5.000 m^2. ■

✸ *Ejemplo 6*: Se quiere construir un mosaico cuadrado de 16 cm de lado como el de la figura.

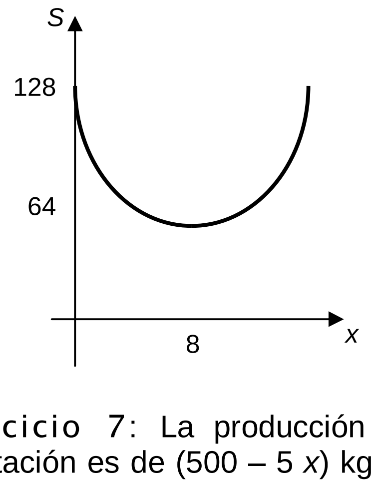


El material de la región sombreada es mármol y es más caro que el material del otro sector. ¿Cuál es el valor de x que permite minimizar el costo?

Para obtener el mínimo costo, se debe utilizar la menor cantidad de mármol posible, es decir, se necesita minimizar la superficie de mármol; cuya función es:

$$S = \frac{x^2}{2} + \frac{(16-x)^2}{2} = 128 - 16\,x + x^2$$

Como S es una función cuadrática con $a > 0$, S tiene un mínimo en su vértice (8; S(8)).



Por lo tanto, la superficie de mármol será mínima y el costo será el menor posible si x = 8 cm.
¿Cuál es el dominio de la función superficie de mármol?■

Ejercicio 7: La producción de manzanas de cada árbol en una plantación es de (500 – 5 x) kg, en donde x es la cantidad de árboles por hectárea. Calcular el valor de x que haga que la producción total por hectárea sea máxima.

Ejercicio 8: Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones; justificar:

a) Toda función cuadrática es decreciente en *R*.
b) Si una función cuadrática tiene máximo en su vértice, su concavidad es hacia arriba.
c) Si una función cuadrática tiene mínimo en su vértice (a; $f(a)$), entonces es creciente en $(-\infty\,;a)$.

Aplicación de sistemas no lineales. Punto de equilibrio de la empresa.

Se dice que una **empresa está en equilibrio** cuando los **costos son iguales a los ingresos**.

Precaución. No confundir con el equilibrio del mercado.

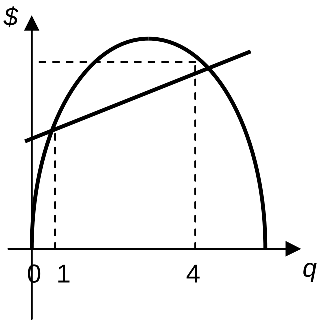
Ejemplo 7: La ecuación de demanda de un bien es $p = -q + 6$ y la ecuación de costo total es $C = q + 4$.
Para calcular el nivel de producción que hace que la empresa esté en equilibrio (ni pierda ni gane), debemos igualar las ecuaciones de ingreso y costo (Recordar que $I = p.q$)

$$I = C$$

$$-q^2 + 6q = q + 4$$

reordenando $\quad q^2 - 5q + 4 = 0$

y resolviendo: $\quad q_1 = 1 \quad$ y $\quad q_2 = 4$



Por lo tanto:
Si se produce un artículo, el costo y el ingreso son iguales a \$ 5.
Si se producen cuatro artículos, tanto el costo como el ingreso es de \$ 8.
Quiere decir que para dos niveles de producción, 1 y 4, la empresa está en equilibrio.

Si q es mayor que 1 pero menor que 4, el ingreso supera al costo total, por lo tanto hay ganancia. ■

En general:

La utilidad de una empresa está dada por la diferencia entre el ingreso total y el costo total.

$$U = I - C$$

La empresa está en equilibrio cuando la utilidad es nula. ¿Por qué?
La empresa tiene ganancia cuando la utilidad es positiva. ¿Por qué?
La empresa tiene pérdida cuando la utilidad es negativa. ¿Por qué?

¿Para qué niveles de producción la empresa del ejemplo anterior tiene pérdidas?

Ejercicio 9: Un productor vende todo lo que produce a $8 por unidad. Los costos fijos son $ 5000 y los costos variables por unidad, $ 3. Se pide:

a) Producción e ingresos totales en el punto de equilibrio.
b) Utilidades cuando se producen 1800 unidades.
c) Pérdidas cuando se producen 450 unidades.
d) Nivel de producción para obtener $ 10000 de ganancia.

Funciones polinómicas

Ya hemos visto que las leyes que describen ciertos fenómenos, surgen como consecuencia de resultados empíricos previos a la formulación de las mismas. (Recordar el ejemplo de la dieta del ratón). Para poder predecir los fenómenos para valores que no fueron registrados, los investigadores "fabrican" fórmulas de funciones cuya gráfica puede pasar exactamente o de manera aproximada, por todos los puntos cuyos valores habían sido hallados en forma experimental.

Las funciones polinómicas permiten "fabricar" dichas fórmulas.

En general:

Toda función de la forma:

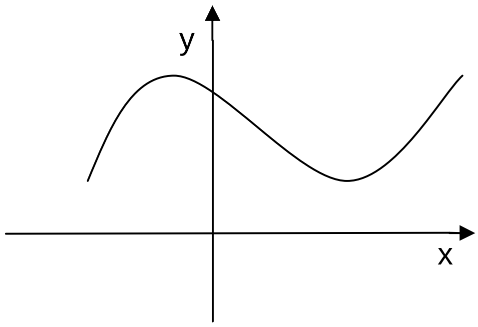
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde n es un número entero no negativo y $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales, se denomina **función polinómica**.

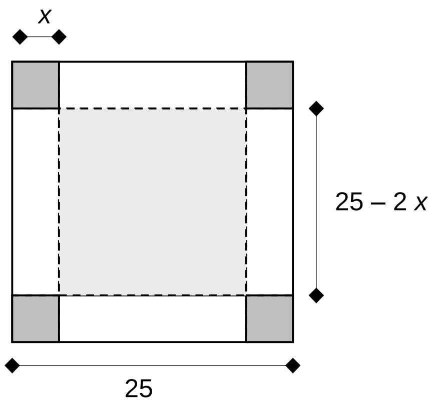
El dominio de la función polinómica está formado por todos los números reales: **D *f* = *R***.

Las funciones polinómicas de **primer grado** son funciones lineales y se representan mediante **rectas**. Las funciones polinómicas de **segundo grado** son funciones cuadráticas y sus gráficas son **parábolas**.

Las gráficas de las funciones polinómicas de grado superior a dos, tienen un aspecto diferente. Por ejemplo, la gráfica aproximada de la función polinómica de tercer grado $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 45$ es la siguiente:



✸ *Ejemplo 8*: Un fabricante desea construir envases de cartón disponiendo para ello de planchas cuadradas de 25 cm. de lado. Cortando cuadrados de lado x en cada uno de los vértices y doblando las aletas hacia arriba, se puede formar una caja abierta de altura x.



El volumen de la caja en función del corte x que se practica en cada caso está dado por:

$$V(x) = (25 - 2x)^2 \cdot x$$

¿De qué grado es la función polinómica $V(x)$?

Sabemos que el dominio de toda función polinómica es el conjunto de los números reales. Pero, ¿cuáles son los valores de x para los cuales tiene sentido la función $V(x)$? ■

Ejercicio 10: Seguimos con el problema del ejemplo 8.
Representar gráficamente $V(x) = 4x^3 - 100x^2 + 625x$ con dominio en el conjunto para el cual el volumen existe.
Vemos que:

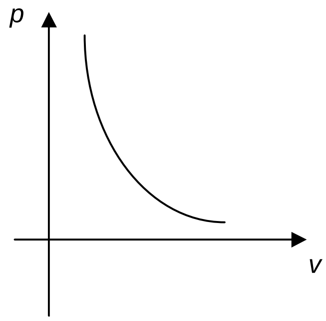
a) El volumen es mínimo cuando x = ...
b) El volumen es máximo cuando x = ...

Ejercicio 11: Sabiendo que el volumen de una esfera está dado por la fórmula $V = \frac{4}{3} \pi r^3$, graficar la función $V(r)$.

Funciones racionales

Una de las funciones no polinómicas más sencillas está dada por la expresión $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{x}}$, con $\boldsymbol{k} \neq 0$.

✸ *Ejemplo 9*: La presión *p* y el volumen *v* de una masa de gas a temperatura constante, verifica la relación $p(v) = \frac{k}{v}$.

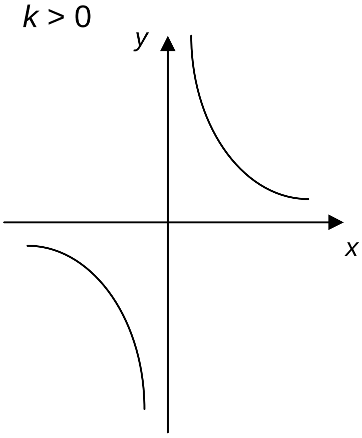


Si el volumen aumenta, la masa de gas se descomprime y la presión es menor. Si el volumen disminuye, la masa de gas se comprime y la presión es mayor.

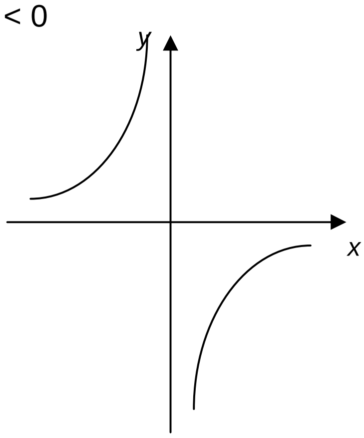
En general:

Las funciones del tipo $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{x}}$, con $\boldsymbol{k} \neq 0$, se llaman **funciones de proporcionalidad inversa**.
El dominio de las funciones de proporcionalidad inversa está dado por todos los números reales excepto el cero: **D *f* = *R* – {0}**.
La gráfica de las funciones de proporcionalidad inversa se llama **hipérbola**.

$k > 0$



$k < 0$



⊗ Precaución. Para que dos magnitudes sean inversamente proporcionales debe existir una constante de proporcionalidad o de variación.

⊗ Precaución. No confundir:

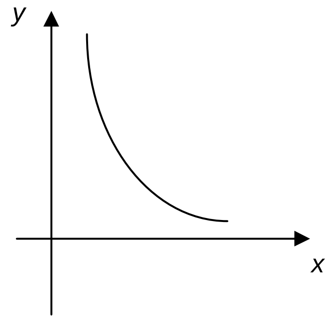
"*y* es inversamente proporcional a *x*" ($y = \frac{k}{x}$) con "si *x* aumenta, *y* disminuye", donde no se especifica la forma en que varían x e y.

⊗ Precaución. No se puede dividir por cero.

Otros ejemplos de proporcionalidad inversa son:

- La base *b* y la altura *h* de los rectángulos de área *A* constante: $b = \frac{A}{h}$.
- La altura *h* alcanzada por un líquido en un tubo capilar y el diámetro *d* de este, a volumen *v* constante: $h = \frac{v}{\pi d}$.
- La intensidad de corriente *I* que pasa por un conductor y la resistencia *R* del conductor, considerando una diferencia de potencial *V* constante: $I = \frac{V}{R}$

La representación correspondiente a estos ejemplos tiene algunas características comunes:



- Están definidas únicamente para valores positivos de la variable independiente.
- No tienen raíces.
- No cortan al eje de ordenadas.

Ejercicio 12: Dibujar las siguientes funciones e indicar su dominio, las intersecciones con los ejes coordenados (si existen) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento:

a) $f(x) = \frac{2}{x}$ b) $f(x) = \frac{-3}{x}$ c) $f(x) = \frac{1}{2x}$

Las funciones de proporcionalidad inversa son una clase particular de funciones racionales.

En general:

Las funciones del tipo $\boldsymbol{f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}}$, donde p(x) y $q(x)$ son polinomios con $q(x)$ no nulo, se llaman **funciones racionales**.
El dominio de las funciones racionales está formado por todos los números reales excepto los ceros de $q(x)$:
D f = R – {$x \in R$ / $q(x)$ = 0}.

Ejercicio 13: Dibujar las siguientes funciones e indicar su dominio, las intersecciones con los ejes coordenados (si existen) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento:

a) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ b) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ c) $f(x)=\dfrac{-1}{x+2}$

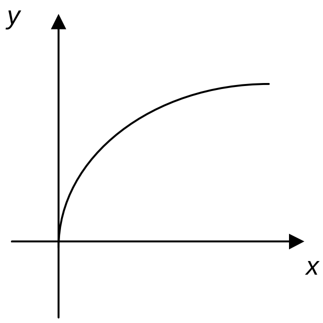
d) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ e) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ f) $f(x)=\dfrac{x^4-x^2}{x^3+x^2-2x}$

Ejercicio 14: Para modificar la dosis de medicamentos en adultos a fin de adaptarla para los niños es común emplear la fórmula de Young. Si a representa la dosis en adultos (en miligramos) y t es la edad del niño (en años), entonces la dosis para niños n es: $n(t)=\dfrac{t\,.\,a}{t+12}$

a) Si a = 100, trazar la gráfica de la función.
b) Analizar el comportamiento de la función cuando t aumenta. ¿Cuál es el valor de la dosis?

Función raíz cuadrada

Una de las funciones no racionales más sencillas es la función raíz cuadrada $\boldsymbol{f(x)=\sqrt{x}}$.



El dominio de la función raíz cuadrada está formado por todos los números reales no negativos. ¿Por qué?
D f = R^+_0.
¿Cuál es el conjunto imagen?

Recordemos que: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ y que el valor de $\sqrt{x}$ es el único número no negativo cuyo cuadrado es x; por ejemplo: $\sqrt{16}$ = 4, no ±4. Probar con la calculadora y observar que -4 no es el resultado de la operación $\sqrt{16}$.
Si una calculadora trabaja solamente con números reales, indica error cuando le pedimos la raíz cuadrada de un número negativo; si no indica error y da una respuesta es porque la máquina trabaja con números complejos.

Ejercicio 15: Dibujar las siguientes funciones e indicar su dominio, las intersecciones con los ejes coordenados (si existen) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento:

a) $f(x) = 2\sqrt{x}$

b) $f(x) = \sqrt{x+1}$

c) $f(x) = \sqrt{x-1}$

d) $f(x) = \sqrt{x+1} - 2$

Función definida a trozos

La función del ejercicio siguiente se define mediante dos fórmulas en diferentes partes de su dominio.

Ejercicio 16: Una compañía financiera planea abrir dos sucursales dentro de dos años en dos lugares: un complejo industrial y un centro comercial en la ciudad. Como resultado de estos planes de ampliación, se espera que los depósitos totales de la empresa durante los próximos cinco años crezcan de acuerdo con la función:

$$f(t) = \begin{cases} \sqrt{2t} + 20 & \text{si} \quad 0 \le t \le 2 \\ \dfrac{t^2}{2} + 20 & \text{si} \quad 2 < t \le 5 \end{cases}$$

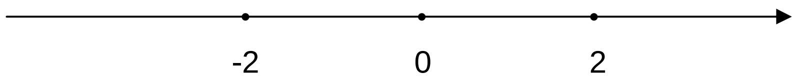
donde $f(t)$ proporciona la cantidad total de dinero (en millones de dólares) en depósito en el año t (t = 0 corresponde al presente). Hallar f(0), f(1), f(2), f(3), f(4), f(5) y trazar la gráfica de la función $f(t)$.
Observación: f es una función, dada por dos fórmulas, se representa en un único diagrama cartesiano. No son dos funciones.

Función valor absoluto

Otra función que se puede definir a trozos es la función valor absoluto:

$$f(x) = |\, x \,| = \begin{cases} -x & si \quad x < 0 \\ x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

El valor absoluto de x se interpreta geométricamente como la distancia del punto *x* al origen de coordenadas. Como es una longitud es siempre no negativa.



$|-2| = -(-2) = |2| = 2$

-2 y 2 están a la misma distancia de cero: dos unidades.

Ejercicio 17: Representar gráficamente $f(x) = |\, x \,|$

Precaución. $\sqrt{x^2}$ no es necesariamente x, pero siempre es: $\sqrt{x^2}$ = **| *x* |**

Por ejemplo: $\sqrt{(-4)^2} = |-4| = 4$ este resultado concuerda con: $\sqrt{16} = 4$.

Si resolvemos la ecuación $x^2 = 16$, resulta que: $\sqrt{x^2} = \sqrt{16} \Rightarrow |\, x \,| = 4$

Las soluciones de la ecuación son los números cuyo valor absoluto es 4, ellos son 4 y -4.

Más ejercicios

18. Un resorte mide 7 cm. cuando colgamos de él 10 g. y mide 13 cm. cuando colgamos 80 g.

  a) Escribir la ecuación que vincula la longitud *l* con el peso *p.*
  b) ¿Cuál es la longitud del resorte cuando no colgamos ningún peso?
  c) ¿Cuál es la variación de longitud por cada 10 g?
  d) Considerando que el resorte empieza a deformarse y perder elasticidad cuando se alarga 5 veces su longitud inicial, ¿cuál es el dominio de definición de la función *l*(*p*)?

19. Dibujar la función $y = 9x - 20$ utilizando una unidad sobre el eje y que sea la décima parte de la unidad sobre el eje x.

20. Representar gráficamente:

$$y=\begin{cases} 3x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ -2 & \text{si} \quad x \notin (0,1) \end{cases}$$

21. Una varilla de cobre que forma parte de un instrumento está expuesta a diferentes temperaturas. Su longitud l es casi una función lineal de la temperatura siempre que $t < 150$ ºC. Encontrar la fórmula de $l(t)$ sabiendo que si $t = 15$ºC, l = 76.45 cm. y que si $t = 100$ºC, $l = 76.56$ cm.

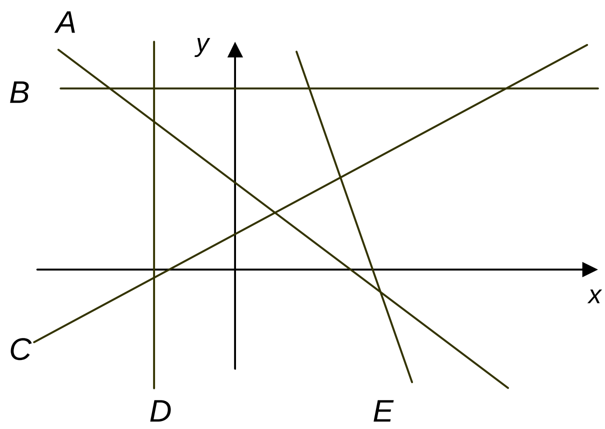
22. Una empresa de productos químicos desea satisfacer un pedido de 500 litros de una solución de ácido nítrico al 25 % (esto significa que el 25 % del volumen es ácido nítrico). Si se encuentran en depósito disponibles soluciones al 30 % y al 18 % ¿cuántos litros de cada una de ellas se deben mezclar para cumplir con lo requerido en el pedido?

23. En pruebas de dietas experimentales para cerdos, se determinó que el peso promedio, W (en kilogramos) de un cerdo era, estadísticamente, función lineal del aumento de días d posteriores al inicio de la dieta en donde $0 < d < 100$. Si el peso de un cerdo fue de 20 kg. al comienzo de la dieta y después subió 6,6 kg. cada diez días; determinar W como función de d y evaluar el peso de un cerdo 50 días después de haber comenzado la dieta.

24. Encontrar la ecuación de la recta que satisface las condiciones:
   a) Que pasa por (2; -5) y (-4; -1).
   b) Que pasa por (3; 0) y es paralela al eje y.
   c) Que pasa por (0; 3) y es paralela al eje x.
   d) Que pasa por (-1; -2) y la pendiente es $\frac{5}{3}$.
   e) Que tiene por gráfica al eje x.
   f) Que tiene por gráfica al eje y.
   g) Pasa por (2; 1) y es perpendicular a la recta $x + y = 0$.
   h) Pasa por (3; 4) y es perpendicular a la recta $x = 2$.
   i) Pasa por (0; -1) y es paralela a la recta determinada por (2; 2) y (3; 1).

Graficar las rectas encontradas.

25. A partir de las gráficas que siguen, determinar si la pendiente de cada una de las rectas es positiva, negativa, nula o no está definida.



26. Determinar las intersecciones con los ejes coordenados de la gráfica de la función $f(x) = -0,5\,x + 3$.

27. Considerar que se requieren \$40 de costos para fabricar 10 artículos y que el costo de fabricar 20 artículos es de \$70. Si el costo C está relacionado en forma lineal con la producción q, determinar la ecuación que relaciona C y q. Calcular el costo de fabricar 35 unidades.

28. Una empresa cobra una comisión del 6% en las compras de lana en cantidades cuyo valor esté comprendido entre \$50 y \$300. Para cantidades que sobrepasen los \$300, la firma cobra el 2% de la cantidad comprada más \$12. Sea $f(x)$ la comisión cobrada y x la cantidad de lana comprada (en pesos).

b) Escribir $f(x)$.
c) Calcular $f(100)$ y $f(500)$.

29. Un comerciante puede vender 200 unidades de cierto artículo al día a \$30 por unidad o 250 unidades a \$27 por unidad. La ecuación de la oferta para este artículo es $6\,p = q + 48$.

c) Determinar la ecuación de la demanda para el artículo, suponiendo que es lineal.
d) Calcular el precio y la cantidad de equilibrio.

30. Determinar el valor mínimo o máximo y representar gráficamente:

a) $y = 2x^2 + 3x - 1$ b) $y = 3 - x - 3x^2$

31. Algunos biólogos estudiaron los efectos nutricionales en ratas que se alimentaron con una dieta que contenía 10 % de proteína. La

proteína consistió en yema de huevo y harina de maíz. Al variar el porcentaje p de yema en la mezcla de proteínas, el grupo de investigadores estimó que el aumento promedio del peso (en gramos) de un animal durante cierto período fue $f(p)$, en donde: $f(p) = -\frac{1}{50}p^2 + 2p + 20$, con 0 < p < 100. Hallar el aumento máximo de peso.

32. Representar gráficamente:
a) $y = \mathbf{x}^2 - 1$ con dominio [-1; 2] b) $y = |\, x^2 - 1 \,|$ con dominio [-2; 2]

33. La función de demanda para el producto de un fabricante es $p = f(q) = 1.200 - 3q$, en donde p es el precio (en dólares) por unidad cuando se tiene una demanda semanal de q unidades. Calcular el nivel de producción que maximiza los ingresos del fabricante y determinar el ingreso máximo.

34. Factorear los polinomios:
a) $x^2 - 16$ b) $2x^2 - 12x + 18$

35. El fabricante de un artículo vende todo lo que produce. Los ingresos totales están dados por $y = 7q^2$ y los costos totales por $y = 6q + 800$ donde q es el número de unidades que se fabrican y venden.
a) Hallar el punto de equilibrio del productor.
b) Para $q = 100$ ¿el productor tiene ganancia o pérdida?

36. Resolver gráfica y analíticamente los siguientes sistemas:
a) $\begin{cases} y = -x^2 + 2x - 5 \\ y = -2x - 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} p = \sqrt{q} \\ p = q^2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = 4x - x^2 + 8 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$

37. Determinar los puntos de equilibrio de una empresa, sabiendo que: los costos fijos son de \$1200, los costos variables por unidad, \$ 2 y los ingresos totales por la venta de q unidades corresponde a $I = 100q^{0,5}$.

38. Resolver las ecuaciones:
a) $x - \frac{14}{x} = 5$ b) $|\, x - 2 \,| = 5$ c) $x^2 - 2^{0.5}x - \frac{5}{4} = 0$

39. Determinar el mayor dominio y bosquejar la gráfica de:
a) $f(x) = \frac{2}{x-3}$ b) $g(x) = 1 - x^2$ c) $h(x) = (x - 2)^{0.5}$

40. El número ***y*** de unidades vendidas cada semana de cierto producto depende de la cantidad ***x*** (en pesos) gastada en publicidad y está

dada por $y = 70 + 150\,x - 0{,}3\,x^2$. ¿Cuánto deberán gastar a la semana en publicidad para que el volumen de ventas sea máximo? ¿Cuál es el volumen de ventas máximo?

41. Representar gráficamente las funciones:

a) $f(x) = x^4$ con dominio [-1; 2] b) $f(x) = -2x^3$ con dominio [-2; 2]

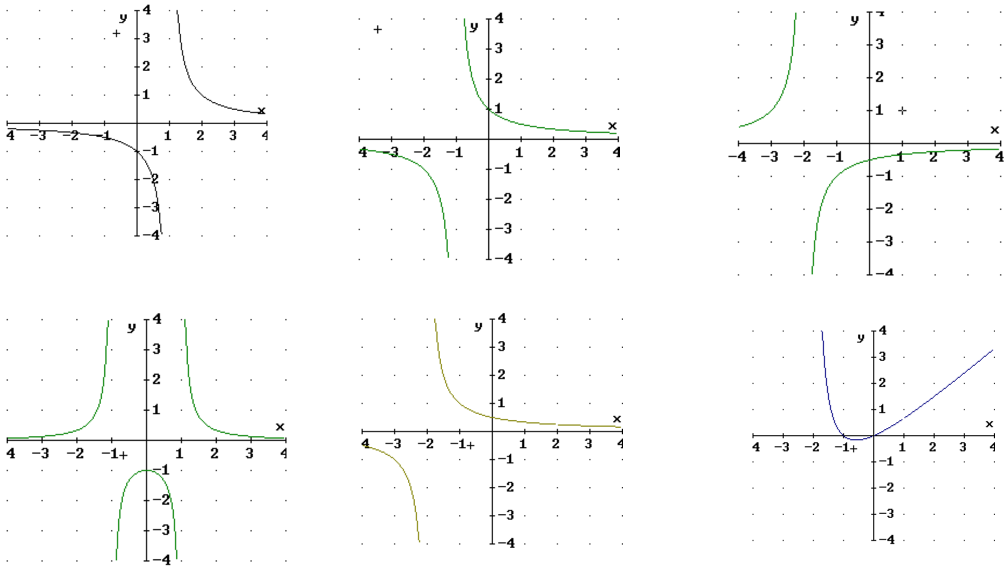
42. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones y justificar:

a) Una recta horizontal no tiene pendiente.
b) La pendiente de la recta dada por $x = a\,y + b$ es a.
c) La ecuación del eje x es $y = 0$.
d) Si el punto $P\,(x\,,\ y)$ pertenece al segundo o cuarto cuadrante, entonces x e y tienen signos opuestos.
e) Un sistema de ecuaciones lineales siempre tiene solución.
f) El dominio de $f(x) = (4 - x)^{0,5}$ es el conjunto de todos los números menores que 4.
g) La representación gráfica de $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ es una parábola para todos los valores de a, b y c.
h) Si $x \neq 3$, $\dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = x + 3$.
i) La gráfica de una función cuadrática es una hipérbola.
j) S $f(x) = a\,x^2$ y $a > 0$, entonces la parábola tiene un máximo en el vértice.
k) Si el discriminante de una ecuación de segundo grado es cero, entonces la ecuación no tiene dos soluciones distintas.

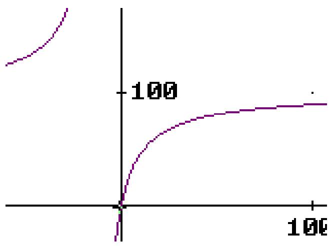
Respuestas

5. 5 y -3; (x-5)(x+3)   6. Infinitas; $y = (x-1)^2$; $y = 1/2(x-1)^2-9/2$ 7. 50   8. F; F, F

9. (1000; 8000); 4000; 2750; 3000   10. 0; 12,5; 4,1   13.

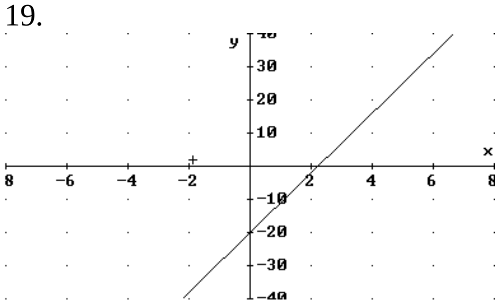


14.

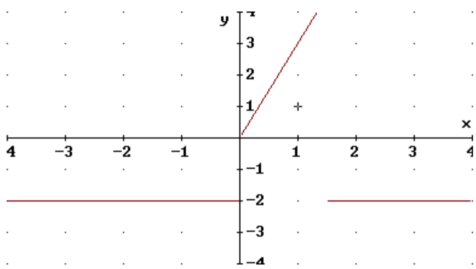


18. $l(p) = 3/35\ p+43/7$; $l(0) = 43/7$; 6/7; $0 < p < 286.6$

19.



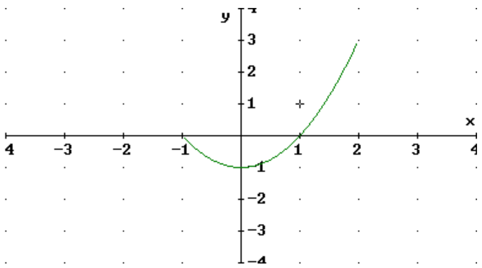
20.

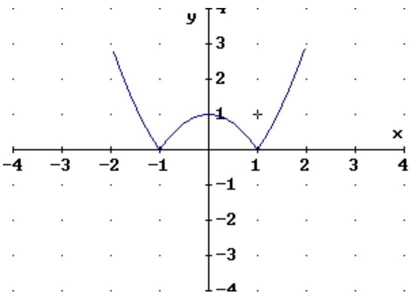


21. $l(t) = 0.0013\ t + 76.43$ 22. 208 y 292

23. $W(d) = 0.66\ d + 20$; $W(50) = 53$ 24. $y = -2/3\ x - 11/3$; $x = 3$; $y = 3$
$y = 5/3\ x - 1/3$; $y = 0$; $x = 0$; $y = x - 1$; $y = 4$; $y = -x - 1$
25. A negativa, C positiva, B nula, E negativa. D no tiene pendiente definida. 26. (6; 0) y (0; 3) 27. $C(q) = 3\ q + 10$; $C(35) = 115$

28.
$$f(x) = \begin{cases} 0.06\ x & \text{si } 50 < x < 300 \\ 0.02\ x + 12 & \text{si } x > 300 \end{cases}$$
$f(100) = 6$; $f(500) = 22$
29. $p = -3/50\ q + 42$; $q = 150$; $p = 33$
30. a) mínimo en $(-3/4; f(-3/4))$ b) máximo en $(-1/6; f(-1/6))$
31. 70 32.





33. (200; 120000) 34. $(x - 4)(x + 4)$; $2(x - 3)^2$ 35. (11,14; 866.64)
b) Obtiene ganancias. 36. a) (3; -8) y (1; -4); b) (0; 0) y (1; 1)
c) (4; 8) (-1; 3) 37. (900; 3000) y (400; 2000)
38. a) $x_1 = 7$; $x_2 = -2$ b) $x_1 = 7$; $x_2 = -3$; c) $x_1 = 2.03$ $x_2 = -0.62$
39. a) $R - \{3\}$ b) R c) $[2; +\infty)$ 40. (250; 18820)
42. son V: c, d, h y k.

.

CONTENIDO

Bibliografía

Altman S. y otros, *Funciones 1*, Longseller, 2008.

De Guzmán M. y otroe, *Matemáticas Bachillerato 1,* Anaya, 2000.

Haeussler E. y otros, *Matemática para administración y economía*, Grupo Editorial Iberoamérica, 2008.

Kaczor P. y otros, *Matemática I*, Santillana Polimodal, 2004.